

2018年7月10日

第12回 多変量正規分布 (7.3–7.4)

村澤 康友

前回のキーワード

同時cdf, 周辺cdf, 同時pmf, 周辺pmf, 同時pdf, 周辺pdf,
期待値の線形性, 共分散, 確率変数の線形結合の分散, 相関
係数, 条件つきcdf, 条件つきpmf, 条件つきpdf, 条件つき
期待値, 条件つき分散, 確率変数の独立性, 独立と無相関

今日のポイント

1. 1変量から多変量に正規分布を拡張する.
2. 多変量正規分布の線形変換は正規分布. したがって周辺分布も正規分布. 多変量正規分布では独立 $\iff$ 無相関. また条件つき分布も正規分布.
3. 正規分布にしたがう独立な確率変数の和は正規分布 (再生性).

目次

1	pdf	4
2	mgf	16
3	多変量正規分布の性質	20
3.1	線形変換	20
3.2	独立と無相関	23
3.3	条件つき分布	25
4	たたみ込み (p. 150)	27

1 pdf

n 変量正規分布 (p. 147)

定義 1. n 変量正規分布の同時 pdf は

$$f(x) := (2\pi)^{-n/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) \right)$$

ただし Σ は対称行列.

注 : $N(\mu, \Sigma)$ と書く.

例： $n = 2$ なら

$$\mu := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma := \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

行列式と逆行列は

$$\det(\Sigma) = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

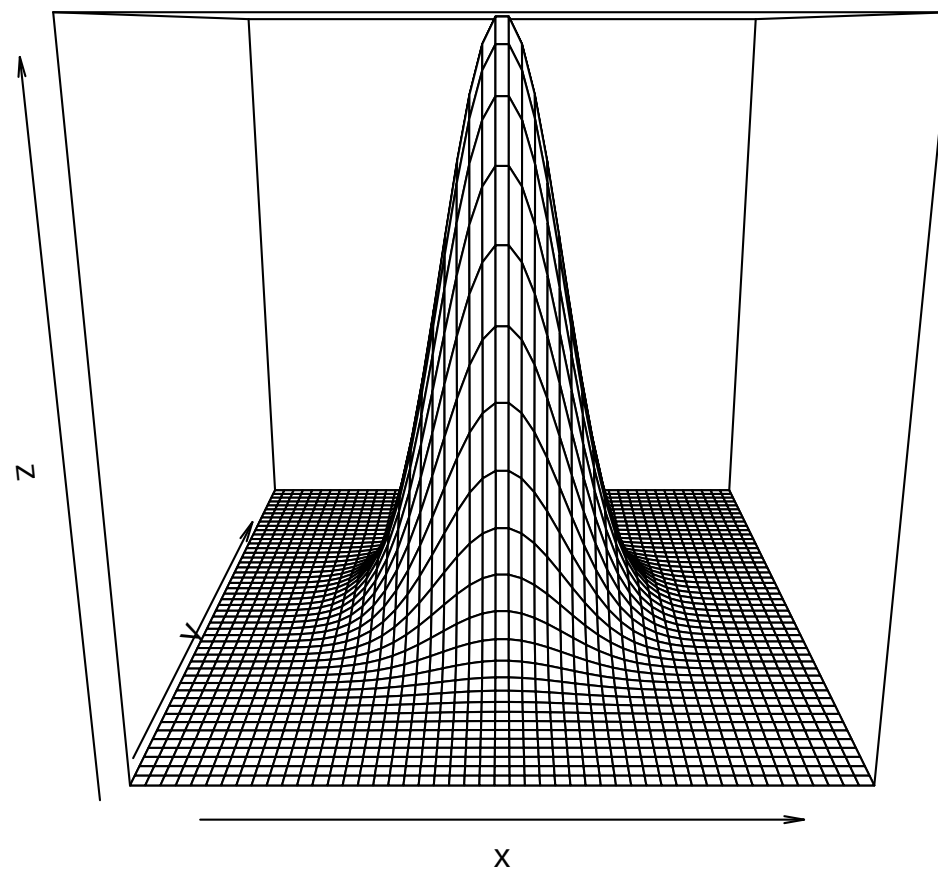
n 変量標準正規分布

定義 2. $N(0, I_n)$ を n 変量標準正規分布 という.

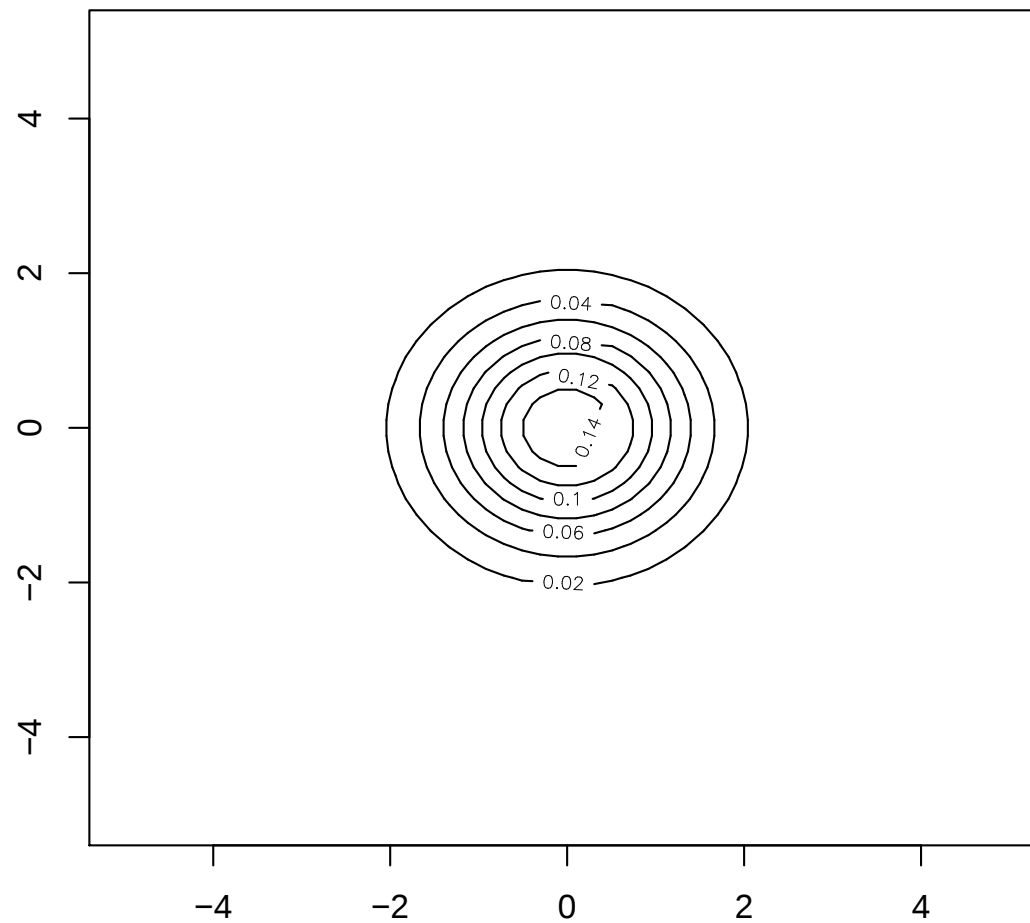
注 : $Z \sim N(0, I_n)$ なら

$$\begin{aligned} f_Z(z) &:= (2\pi)^{-n/2} \exp \left(-\frac{z'z}{2} \right) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \exp \left(-\frac{z_1^2 + \cdots + z_n^2}{2} \right) \end{aligned}$$

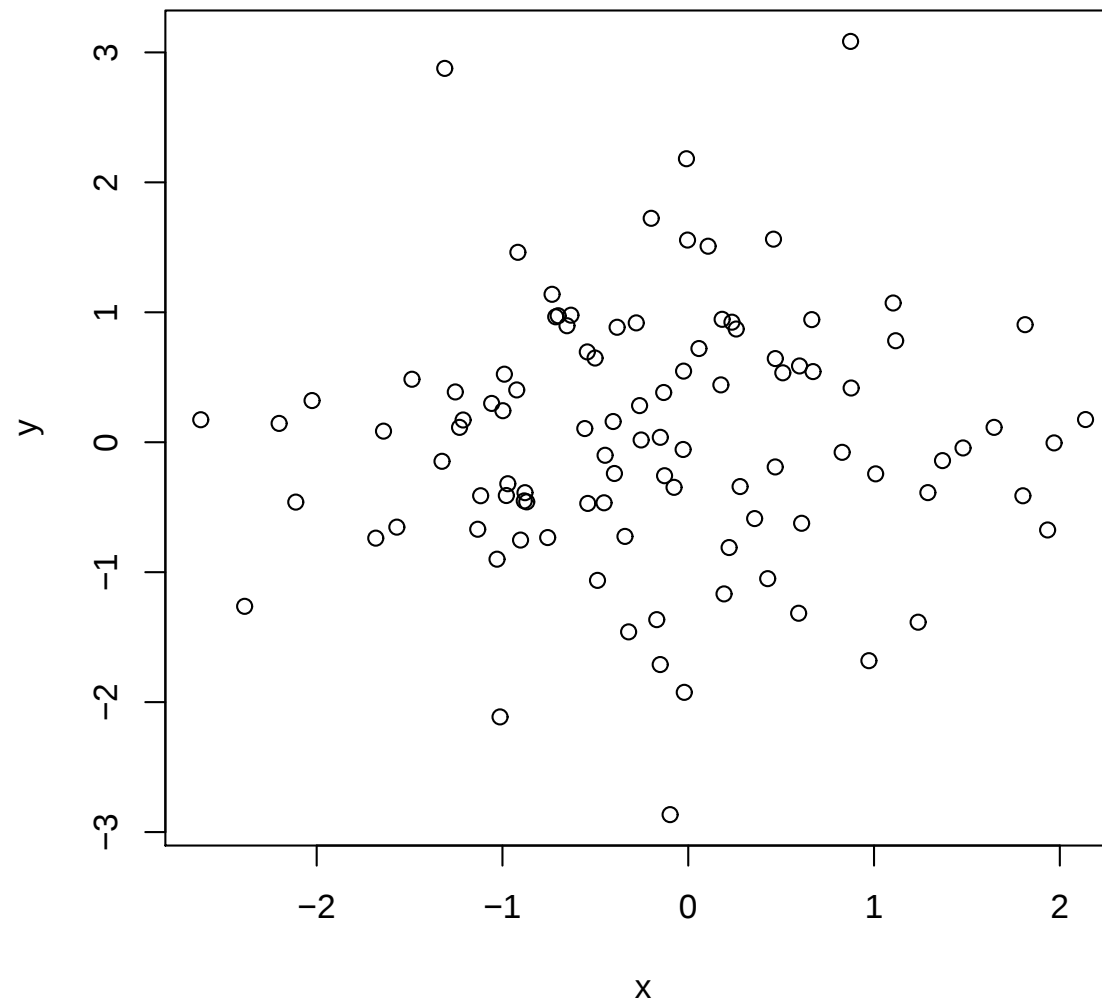
2変量正規分布のpdf（無相関）



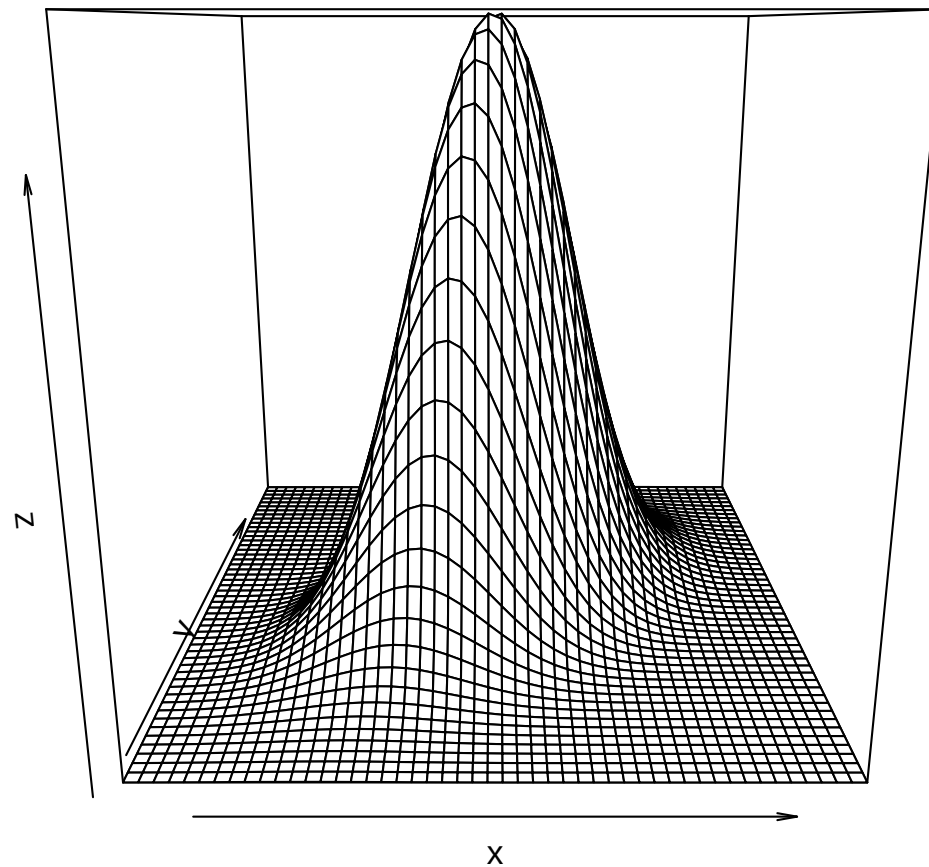
pdfの等高線図（無相関）



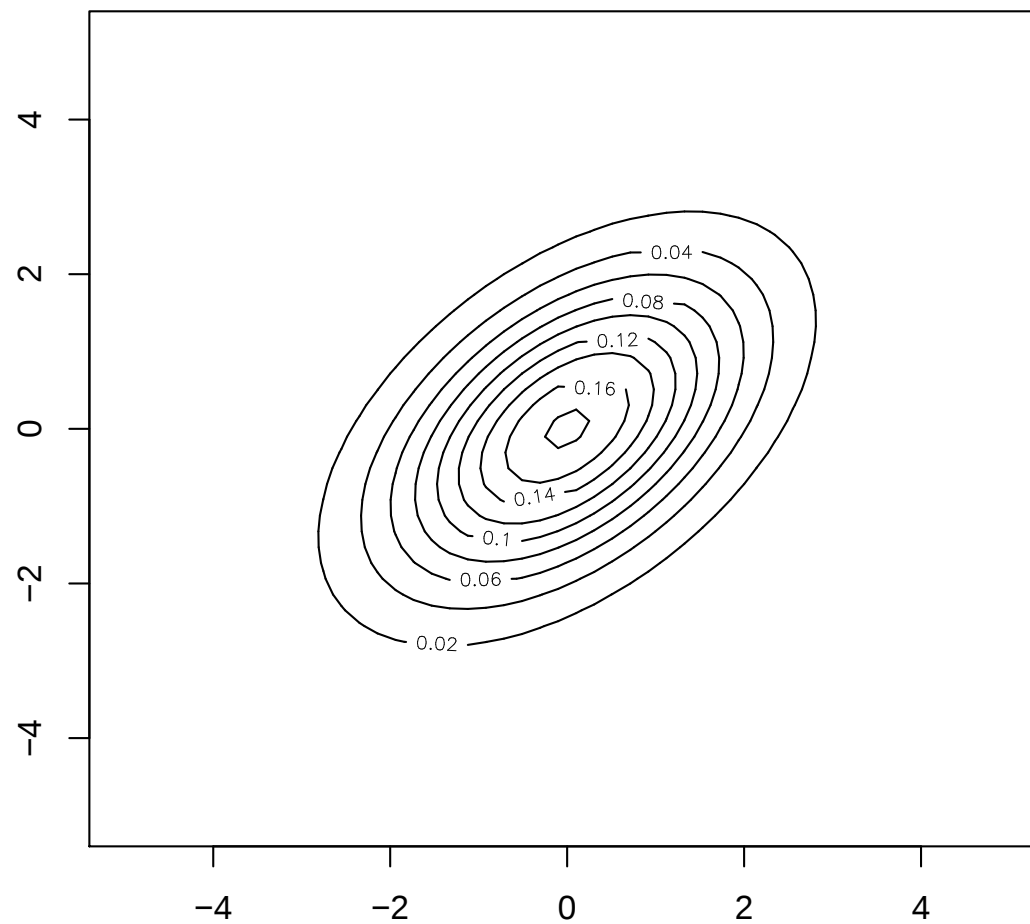
2変量正規乱数の散布図（無相関）



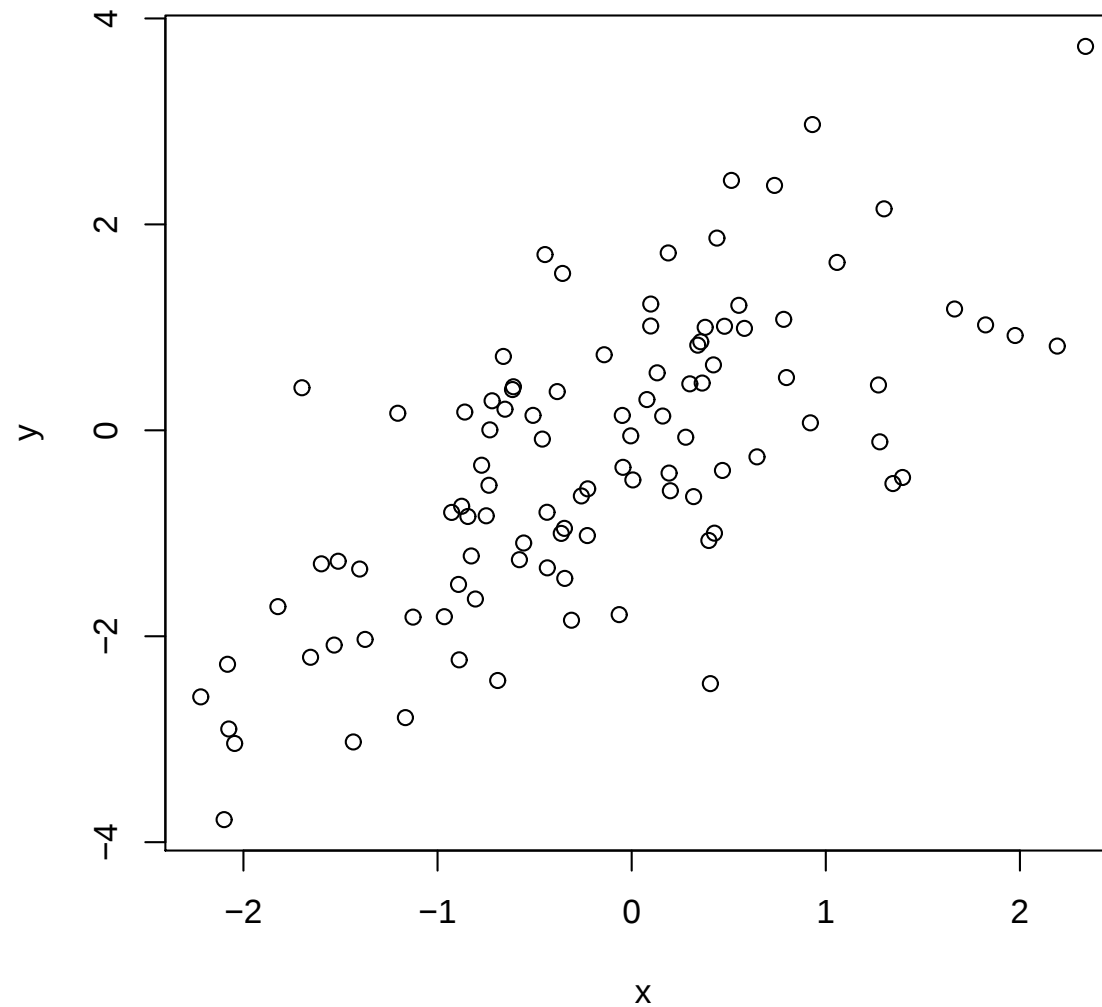
2変量正規分布のpdf（正の相関）



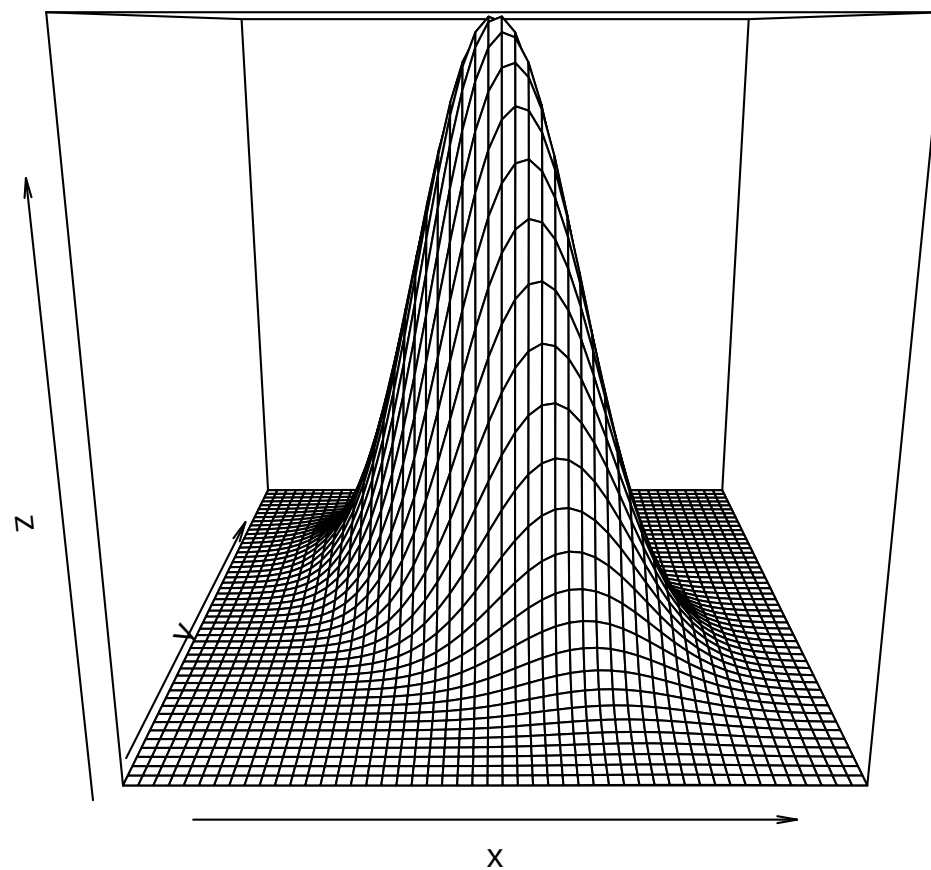
pdfの等高線図（正の相関）



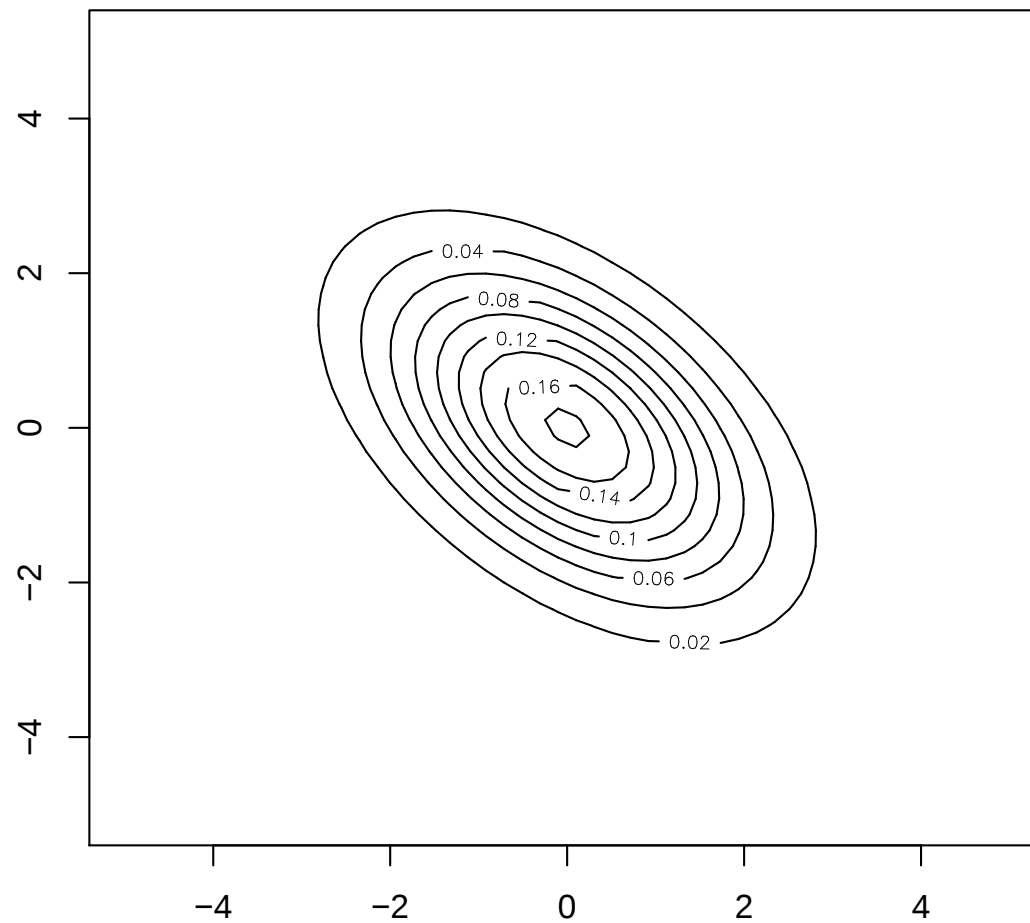
2変量正規乱数の散布図（正の相関）



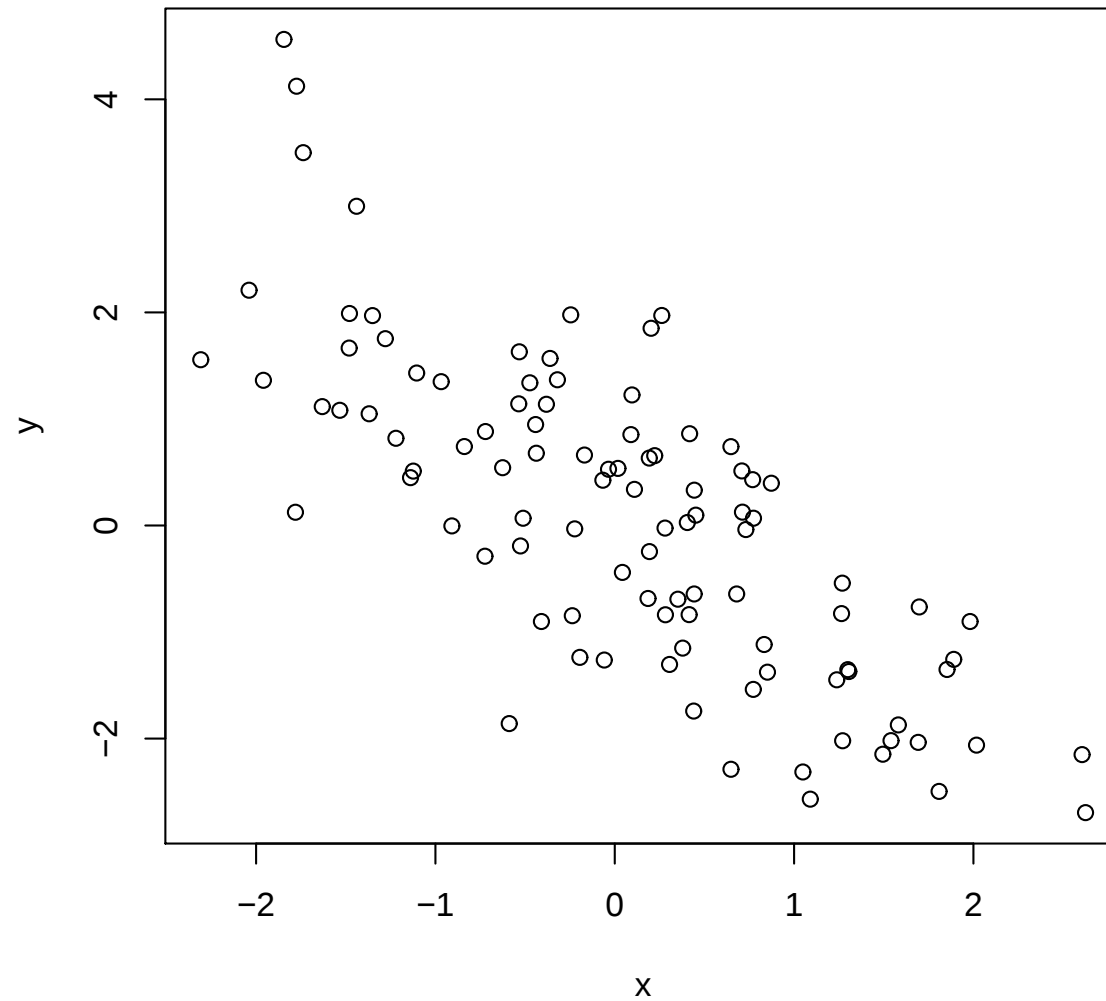
2変量正規分布のpdf（負の相関）



pdfの等高線図（負の相関）



2変量正規乱数の散布図（負の相関）



2 mgf

定理 1. $N(\mu, \Sigma)$ の *mgf*は

$$M(t) = \exp \left(\mu' t + \frac{t' \Sigma t}{2} \right)$$

注 : 1変量なら

$$M(t) = \exp \left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right)$$

平均と分散共分散行列

定理 2. $X \sim N(\mu, \Sigma)$ なら

$$E(X) = \mu$$

$$\text{var}(X) = \Sigma$$

注：確率ベクトル X の分散共分散行列は

$$\text{var}(X) := E((X - E(X))(X - E(X))')$$

証明：mgfの1階導関数は

$$M'_X(t) = (\mu + \Sigma t) \exp \left(\mu' t + \frac{t' \Sigma t}{2} \right)$$

2階導関数は

$$\begin{aligned} M''_X(t) &= \Sigma \exp \left(\mu' t + \frac{t' \Sigma t}{2} \right) \\ &\quad + (\mu + \Sigma t)(\mu + \Sigma t)' \exp \left(\mu' t + \frac{t' \Sigma t}{2} \right) \end{aligned}$$

平均は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= M'_X(0) \\ &= \mu \end{aligned}$$

分散共分散行列は

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \mathbf{E}(X X') - \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(X)' \\ &= M''_X(0) - \mu \mu' \\ &= \Sigma + \mu \mu' - \mu \mu' \end{aligned}$$

3 多変量正規分布の性質

3.1 線形変換

定理 3. $X \sim N(\mu, \Sigma)$ なら

$$AX + b \sim N(A\mu + b, A\Sigma A')$$

証明：

$$\begin{aligned} M_{AX+b}(t) &:= \mathbf{E} \left(e^{t'(AX+b)} \right) \\ &= \mathbf{E} \left(e^{t'AX} \right) e^{t'b} \\ &= M_X(A't) e^{b't} \\ &= \exp \left(\mu'(A't) + \frac{(A't)'\Sigma(A't)}{2} \right) e^{b't} \\ &= \exp \left((A\mu + b)'t + \frac{t'(A\Sigma A')t}{2} \right) \end{aligned}$$

周辺分布

系 1. $X \sim N(\mu, \Sigma)$ なら

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

証明：前定理において

$$A := (1, 0, \dots, 0)$$

$$b := 0$$

などとすればよい.

3.2 独立と無相関

定理 4. $X \sim N(\mu, \Sigma)$ なら

$$X_1, \dots, X_n \text{ は独立} \iff X_1, \dots, X_n \text{ は無相関}$$

証明：“ $\implies$ ” 正規分布でなくても成立.

“ $\impliedby$ ” Σ は対角だから

$$\det(\Sigma) = \sigma_1^2 \cdots \sigma_n^2$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} f_X(x) &:= (2\pi)^{-n/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) \right) \\ &= (2\pi)^{-n/2} (\sigma_1^2 \cdots \sigma_n^2)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n (2\pi)^{-1/2} (\sigma_i^2)^{-1/2} \exp \left(-\frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right) \\ &= f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n) \end{aligned}$$

3.3 条件つき分布

定理 5. $(X'_1, X'_2)' \sim N(\mu, \Sigma)$ なら

$$X_1|X_2 \sim N(\mu_{1|2}, \Sigma_{11|2})$$

ただし

$$\mu_{1|2} := \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2)$$

$$\Sigma_{11|2} := \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

証明：条件つき pdf の定義より

$$f_{1|2}(x_1|x_2) := \frac{f_{1,2}(x_1, x_2)}{f_2(x_2)}$$

これをひたすら計算する（かなり面倒）.

4 たたみ込み (p. 150)

定義 3. 独立な確率変数の和の分布を求めることをたたみ込みという.

注: mgfを用いるのが簡単. X と Y が独立なら

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &:= \mathbb{E} \left(e^{t(X+Y)} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{tX} \right) \mathbb{E} \left(e^{tY} \right) \\ &= M_X(t) M_Y(t) \end{aligned}$$

再生性 (p. 151)

定義 4. たたみ込んでも分布の型が変わらない性質を再生性という.

例：2項分布，ポアソン分布，正規分布.

2項分布の再生性 (p. 150)

成功確率 p の独立なベルヌーイ試行における成功回数は

- m 回の試行では $X \sim \text{Bin}(m, p)$
- n 回の試行では $Y \sim \text{Bin}(n, p)$
- $m + n$ 回の試行では $X + Y \sim \text{Bin}(m + n, p)$

ポアソン分布の mgf (p. 130)

定理 6. $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ の mgf は

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

証明：

$$\begin{aligned} M_X(t) &:= \mathbf{E} \left(e^{tX} \right) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x e^{-\lambda}}{x!} \\ &= e^{\lambda e^t - \lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x e^{-\lambda e^t}}{x!} \end{aligned}$$

ポアソン分布の再生性 (p. 150)

定理 7. $X \sim \text{Poi}(\lambda_X)$, $Y \sim \text{Poi}(\lambda_Y)$ が独立なら

$$X + Y \sim \text{Poi}(\lambda_X + \lambda_Y)$$

証明 :

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= M_X(t)M_Y(t) \\ &= e^{\lambda_X(e^t-1)}e^{\lambda_Y(e^t-1)} \\ &= e^{(\lambda_X+\lambda_Y)(e^t-1)} \end{aligned}$$

正規分布の再生性 (p. 151)

定理 8. $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ が独立なら

$$X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

証明 :

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= M_X(t)M_Y(t) \\ &= \exp\left(\mu_X t + \frac{\sigma_X^2 t^2}{2}\right) \exp\left(\mu_Y t + \frac{\sigma_Y^2 t^2}{2}\right) \\ &= \exp\left((\mu_X + \mu_Y)t + \frac{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

今日のキーワード

n 変量正規分布, n 変量標準正規分布, 正規分布の性質 (線形変換, 周辺分布, 独立と無相関, 条件つき分布), たたみ込み, 再生性 (2項分布, ポアソン分布, 正規分布)

次回までの準備

復習 教科書第7章3-4節

予習 教科書第8章